Untersuchung über die Wasserstände der Ostsee bei Swinemünde in den Jahren 1882/1900.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

bei der

Philosophischen Fakultät

der

UNIVERSITÄT LEIPZIG

eingereicht von

Albert Döge

aus Leipzig.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

LEIPZIG,

Druck von Sturm & Koppe (A. Dennhardt),

1910.

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion auf Grund der Gutachten der Herren

Bruns und **Hölder.**

LEIPZIG, den 22. Februar 1910.

Der Procancellar.
K. Rohn.

Einleitung.

§ 1. Die nachstehende, in dem Seminar von Prof. Bruns ausgeführte Untersuchung verdankt ihre Entstehung einer von dem Direktor des Geodätischen Instituts in Potsdam, Prof. Helmert, gegebenen Anregung, die sich auf den Nachweis der Chandler'schen Periode in den Swinemünder Pegelablesungen bezog. Im Laufe der Arbeit hat sich allerdings ihr ursprüngliches Ziel stark verschoben: was jetzt vorliegt ist im wesentlichen eine Vorstudie, die dazu dienen soll, Fingerzeige für die planmäßige Bearbeitung eines umfangreicheren Materials zu gewinnen, und die außerdem bestimmt war, ein Urteil über die Zweckmäßigkeit des besonderen von mir benutzten Rechnungsganges zu liefern. Da die Ergebnisse der eigentlichen Rechnung in dem Schlußabschnitte zusammengestellt sind, so möge hier nur bemerkt werden, daß die Methode, für jede Beobachtungsgleichung eine Zahlenkarte anzulegen und nur mit diesen Karten zu arbeiten, in der Tat durchaus bequem ist, sobald man für die fortwährend auszuführenden Summationen über eine Additionsmaschine verfügt, die mit Tastenanschlag und Typendruck arbeitet. Im vorliegenden Falle war mir eine der Leipziger Sternwarte gehörige Burrough'sche Additionsmaschine überlassen worden, deren Benutzung sich als eine ganz außerordentliche Erleichterung herausgestellt hat.

§ 2. Die Nachweisung der Chandler'schen Periode in den Gezeiten ist schon mehrfach unternommen worden, so von H. G. van de Sande-Bakhuyzen (Astronomische Nachrichten Band 136) und von Christie (Bulletins of the Philosophical Society of Washington, Bd. 13). Beide fanden eine Periode von 431 Tagen, die ich weiterhin zu Grunde gelegt habe. Da ferner für Swinemünde bisher nur Ergebnisse über die jährliche Schwankung und über die vom Stundenwinkel des Mondes und der Sonne abhängenden Gezeiten veröffentlicht sind, so habe ich die Zubereitung des benutzten Materials sogleich derart eingerichtet, daß sie für die Untersuchung irgend einer anderen Periode dienen kann.

§ 3. Aus der Literatur über den Swinemünder Pegel kommen hier folgende Arbeiten in Betracht:

Hagen: „Über Flut und Ebbe in der Ostsee", Abh. der Berliner Akademie der Wissenschaften; 1857, 23—39.

W. Seibt: „Das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde", Publikation des kgl. preußischen geodätischen Institutes; I. Mitteilung, Berlin 1881.

W. Seibt: „Das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde", II. Mitteilung, Berlin 1890.

A. Westphal: „Das Mittelwasser der Ostsee bei Travemünde, Marienleuchte, Wismar, Warnemünde, Arkona und Swinemünde in den Jahren 1882/97", Publikation des kgl. preußischen geodätischen Institutes; Berlin 1900.

Die Arbeit von Hagen aus dem Jahre 1857 ist in ihren Ergebnissen durch die neueren Arbeiten überholt worden, jedoch soll der von Hagen benutzte Gedanke, daß die Beobachtungen einer Art Reinigung zu unterwerfen seien, in abgeänderter Gestalt hier Verwendung finden. Die mühsame Sichtung des Materials von 1811 an und die Zusammenstellung

aller Reduktionselemente ist vor allem Seibt zu danken. Bevor nicht diese Untersuchungen angestellt waren, konnten die Ablesungen aus früheren Jahren nicht benutzt werden, ohne daß man zu falschen Resultaten kam. In der Tat ist auch auf diese Weise die irrige Ansicht einer Senkung der Ostseeküste entstanden. Seibt hat nachgewiesen, daß die betreffenden Resultate nur durch unvorsichtige Verlegung eines Referenzpunktes, die bei Nivellements nicht berücksichtigt worden war, beeinflußt waren. Durch die Arbeiten von Seibt und Westphal ist jetzt einwandfrei bewiesen, daß von einer merklichen Hebung oder Senkung der Ostseeküste innerhalb der letzten 100 Jahre nicht die Rede sein kann.

Im übrigen ist in den Arbeiten von Seibt und Westphal — wie schon die Titel erkennen lassen — das eigentliche Ziel immer die Feststellung des Mittelwassers; die Gezeiten sind nur soweit berücksichtigt, als sie für die genannte Aufgabe Bedeutung besitzen.

§ 4. Während in den Abhandlungen von Seibt nur die Monatsmittel aus den Wasserständen angegeben sind, finden sich bei Westphal die täglichen Mittagsablesungen aus den Jahren 1882/97. Diese legte ich der Arbeit zu Grunde. Die Reihe erschien jedoch noch etwas zu kurz, deshalb nahm ich noch die 3 folgenden Jahre 1898/1900 hinzu; ich erhielt so eine Reihe von 6939 Tagen. Für die 3 letzten Jahre wurden mir die Originalablesungen vom kgl. preußischen geodätischen Institut zur Verfügung gestellt. Ich möchte nicht unterlassen, hierfür an dieser Stelle besonders zu danken.

Die Wasserstände wurden Januar 1882 bis August 1887 an einem selbstregistrierenden Pegel abgelesen. 1887 fiel dieser einer Feuersbrunst zum Opfer, und es wurde deshalb bis 1891 an einem Skalenpegel abgelesen bis im August dieses

Jahres ein neuer selbstregistrierender Pegel aufgestellt wurde, an dem alle folgenden Beobachtungen angestellt wurden. Betreffs der Pegel, Reduktionselemente usw. kann ich auf die genannten Arbeiten verweisen.

Der Ansatz der Rechnung und die Zahlenkarten.

§ 5. Da es sich hier um die Bestimmung periodischer Schwankungen handelt, so läuft der herkömmliche Ansatz darauf hinaus, daß man den beobachteten Wasserstand h gleich einer trigonometrischen Reihe setzt, in der die Argumente der einzelnen Sinus- und Cosinus-Glieder linear von der Zeit abhängen. Rechnet man nun die Zeit t in Tagen von einem bestimmten Nullpunkte — hier dem Mittag des 1. Januar 1882 — ab und bezeichnet die täglichen Anderungen der einzelnen Argumente mit $n_1, n_2, \ldots$; so läßt sich der übliche Ansatz zunächst in der Gestalt

$$h = c_0 + c_1 \cos n_1 t + s_1 \sin n_1 t + c_2 \cos n_2 t + s_2 \sin n_2 t + \ldots$$

schreiben, worin die Koeffizienten c, s die gesuchten Unbekannten der Aufgabe darstellen. Hierbei sind die Widersprüche, die nach der Ermittelung der c, s zwischen den beobachteten h und den Werten der rechten Seite übrig bleiben, als zufällige Beobachtungsfehler aufzufassen, die durch eine geeignete Zusammenfassung von möglichst vielen derartigen „Beobachtungsgleichungen“ ihre Ausgleichung zu finden haben.

Man denke sich jetzt alle täglichen Bewegungen n, die in dem vorstehenden Ansatz berücksichtigt werden sollen, nach ihrer Größe geordnet und darauf in dieser Reihe jedes n gestrichen, das sich als das ganzzahlige Vielfache eines vorhergehenden n erweist. Versteht man sodann jetzt unter

$n_1, n_2, ..$ die übrig gebliebenen n, so treten in der trigonometrischen Reihe die Argumente

$$N_1 = n_1 t, \quad N_2 = n_2 t, \ \ldots$$

nebst deren Vielfachen auf, und man kann nunmehr schreiben

$$\begin{aligned} h = {} & c(0,0) + c(1,1)\cos N_1 + s(1,1)\sin N_1 \\ & + c(1,2)\cos 2N_1 + s(1,2)\sin 2N_1 + .. \\ & + c(2,1)\cos N_2 + s(2,1)\sin N_2 \\ & + c(2,2)\cos 2N_2 + s(2,2)\sin 2N_2 + .. \\ & + \text{usw.} \end{aligned}$$

Sind die n-Größen festgesetzt worden, so liefert jeder beobachtete Wasserstand eine Beobachtungsgleichung von der vorstehenden Form.

Der beschriebene Ansatz erzeugt mit dem vorliegenden Beobachtungsmaterial nahezu 7000 Gleichungen, die nunmehr auf geeignete Weise in „Normalgleichungen“ zusammenzufassen sind, da ja die Anzahl der zu ermittelnden Unbekannten c, s verhältnismäßig klein ist. Denkt man sich nun auf einem Kreise vom Halbmesser Eins für die Bogenzählung einen Nullpunkt nebst der positiven Zählungsrichtung festgesetzt und trägt einen Argumentwert N vom Nullpunkte aus als Bogen ab, so liefert das Ende des Bogens einen bestimmten Punkt N. Der zwischen 0^0 und 360^0 liegende Abstand dieses Punktes N vom Nullpunkte soll als die „Phase“ des Arguments N bezeichnet werden und kommt bei der Berechnung von $\cos N$ oder $\sin N$ allein in Betracht, während die in dem Argumentwerte N enthaltenen Vielfachen des Kreisumfanges gleichgültig sind. Zur Erleichterung der Rechnung ist bei der Gruppierung der Beobachtungsgleichungen mit abgerundeten Phasenwerten gerechnet worden. Denkt man sich nämlich den Kreisumfang nicht in 360^0, sondern in 20 gleiche Teile zerlegt,

so kommt einem solchen Teile die Länge von 18^0 zu. Drückt man ferner die Phase in der neuen Einheit aus und rundet ihren Zahlenwert auf ganze Zahlen ab, so entstehen die abgerundeten Phasenwerte

$$0, 1, 2, \ldots 19,$$

die als Repräsentanten der Bogen

$$351^0 \text{ bis } 9^0,\ 9^0 \text{ bis } 27^0,\ 27^0 \text{ bis } 45^0 \text{ usw.}$$

dienen. Diese Zwanzigteilung ist hier gewählt worden, weil sie für die vorliegende Aufgabe als hinreichend fein erscheint und für die Rechnung gewisse Annehmlichkeiten bietet; außerdem konnte ich in diesem Falle für die Auflösung der Normalgleichungen ein zu andren Zwecken gedrucktes Rechnungsformular der Leipziger Sternwarte benutzen.

Nach diesen Vorbemerkungen denke man sich nunmehr alle Beobachtungsgleichungen, in denen das Argument N_r den abgerundeten Phasenwert N_0 liefert, herausgesucht und zu einem arithmetischen Mittel vereinigt. Die so gebildete Normalgleichung besitzt dann folgendes Aussehen. Auf der linken Seite steht das Mittel aus den Wasserständen derjenigen Tage, für die N_r den Phasenwert N_0 annimmt. Auf der rechten Seite tritt zunächst die Unbekannte $c(0,0)$ auf. Ferner erhalten die zu N_r gehörigen Unbekannten $c(r,q)$ und $s(r,q)$ Zahlenkoeffizienten, die gleich den Mittelwerten aus den Größen $\cos qN_r$ und $\sin qN_r$ sind, und mit vorläufig ausreichender Annäherung durch die Zahlen $\cos qN_0$ und $\sin qN_0$ ersetzt werden können, so lange q, wie es hier der Fall ist, auf niedrige Werte beschränkt bleibt. Wenn man will, kann man übrigens den begangenen Fehler nachträglich durch einen an die Unbekannten anzubringenden Korrektionsfaktor berücksichtigen, der in der Klimatologie, wo es sich um ähnliche

Aufgaben handelt, als „Reduktion wegen Krümmung“ bekannt ist. Ich habe dies jedoch unterlassen, da die Korrektion für die in Betracht kommenden Werte von q gering ist, und da es sich überdies hier in erster Linie nur um eine vorbereitende Orientierung handelt.

Betrachtet man nun des weiteren noch die von den übrigen Argumenten N_a, N_b, .. abhängenden Glieder der Normalgleichung, so erkennt man, daß die Phasen von N_a, .. für die Tage, die der Bedingung

$$\text{Phase } N_r = N_0$$

genügen, im allgemeinen nahezu gleichmäßig über den Kreisumfang verteilt sind, und daß sich deswegen die Mittel aus den Koeffizienten

$$\cos N_a,\ \sin N_a,\ \cos 2\,N_a,\ \sin 2\,N_a,\ \ldots,\ \cos N_b,\ \sin N_b,\ \ldots$$

nahezu auf Null reduzieren, also in erster Annäherung vernachlässigt werden dürfen. Ausnahmen können allerdings vorkommen. Wenn z. B. ein Argument N_a sich so langsam ändert, daß es in der ganzen Beobachtungszeit nur einen mäßigen Bruchteil des Kreises durchläuft, so kann natürlich eine angenähert gleichmäßige Verteilung der Phasen von N_a nicht eintreten. Dieser Fall kommt indessen hier nicht in Betracht, weil selbst das langsamste unter den hier berücksichtigten Argumenten, nämlich die Länge des Mondknotens, innerhalb der 19 Beobachtungsjahre reichlich einen vollen Umlauf ausführt. Die andre Ausnahme kann eintreten, wenn die zu N_a gehörige tägliche Bewegung n_a sich so wenig von n_r unterscheidet, daß die Differenz $N_a - N_r$ innerhalb der Beobachtungszeit nur einen Bruchteil des Kreises durchläuft. In diesem Falle ist dann die Ausdehnung der Beobachtungsreihe zur Trennung der Argumente N_r und N_a nicht ausreichend.

Nach diesen Bemerkungen nimmt die Normalgleichung, die zu der Bedingung

$$\text{Phase } N_r = N_0, \quad (N_0 = 0, 1, 2, \ldots, 19)$$

gehört, vorläufig die Gestalt

$$H = c(0,0) + c(r,1)\cos N_0 + s(r,1)\sin N_0 + c(r,2)\cos 2N_0 + s(r,2)\sin 2N_0 + \ldots$$

an. Hierin bedeutet H das arithmetische Mittel aus den Wasserständen der Tage, für die die angegebene abgerundete Phasengleichung erfüllt ist. Ferner sind für die erste Annäherung die von den übrigen Argumenten herrührenden Reihenglieder einfach vernachlässigt worden. Für die zweite Annäherung würden natürlich die unterdrückten Glieder mit anzusetzen sein, was an sich keine besondren Schwierigkeiten bietet, da sich die hierbei nötigen Mittelwerte der Cosinus- und Sinus-Größen hinreichend genau nach einfachen Formeln berechnen lassen. Ich bin jedoch notgedrungen bei der ersten Annäherung stehen geblieben, weil die benutzte Beobachtungsreihe zu kurz ist, um eine befriedigende Elimination der langsameren aperiodischen Schwankungen zu gestatten, die nach der von Westphal mitgeteilten Kurve der Jahresmittel unzweifelhaft vorhanden sind und in der Hauptsache durch meteorologische Vorgänge erzeugt sein dürften.

Die Auflösung der oben angegebenen vereinfachten Normalgleichungen läßt sich ohne weiteres nach bekannten Methoden bewerkstelligen und bedarf deswegen keiner besonderen Erläuterung.

§ 6. Die Hauptarbeit für die Bildung der Normalgleichungen besteht in der Berechnung der Mittelwerte H, da man hierzu die ganze Beobachtungsreihe nach den abgerundeten zwanzig Phasen der jeweilig untersuchten Periode ab-

zuteilen und die Wasserstände jeder Abteilung zu mitteln hat. Handelt es sich um Perioden, die 100 oder mehr Tage umfassen, so könnte man die Abteilung ganz gut unmittelbar in den Tabellen der Westphal'schen Abhandlung vornehmen und die gedruckt vorliegenden Zahlen in die Additionsmaschine tasten. Für die kürzeren Perioden wäre jedoch ein solches Verfahren einigermaßen beschwerlich, und dasselbe gilt, wenn man eine größere Anzahl von Perioden untersuchen will. Aus diesem Grunde habe ich auf den Vorschlag von Prof. Bruns einen anderen Weg eingeschlagen und für jeden Beobachtungstag eine besondre „Zahlenkarte" angelegt, die alle Angaben aufzunehmen hat, die für die Beobachtungsgleichung des Tages in Betracht kommen. Man macht dadurch, wenn man einmal die zur Herstellung der Karten notwendige Mühe aufgewendet hat, alles weitere Ausschreiben von Zahlen entbehrlich, weil sich die Gruppierung und Addition der Wasserstände unmittelbar an den Karten vornehmen läßt.

Die Einrichtung der Karten ist aus der nachstehend mitgeteilten Probe zu entnehmen. Das Kartenblatt hat nahezu 55 mm Breite bei 138 mm Höhe und trägt in der Mitte die laufende Nummer, die mit einem Nummerierapparat aufgestempelt wurde. Da der erste Tag der Reihe die Nummer Null erhielt, so gibt die Nummer zugleich die seit der Zeit $t = 0$, d. h. seit 1882 Januar 1, Mittag verflossene Anzahl der

				—136				9864
13		10			7			4
	1			18			16	
18		17			4			12
	19			7			5	
				4231				
2		0			18			16
	15			13			11	
19		12			6			12
	5			19			14	
0		8			6			3

Tage an. Der obere Rand der Karte enthält den in Millimetern ausgedrückten Wasserstand h, wobei links die positiven, in der Mitte die negativen h eingetragen wurden, während die Zahl rechts den um 10000 vermehrten Wert von h angibt. Die übrigen in der Probe ersichtlichen Zahlen bedeuten die Phasenwerte derjenigen Argumente, deren Berücksichtigung bei der Herstellung der Karten ursprünglich in Aussicht genommen war, nachher allerdings nur teilweise erfolgt ist. Von der Rückseite der Karte wurde vorläufig nur die oberste Zeile für vier weitere Argumente benutzt, sodaß der übrige Raum noch für eine spätere Fortsetzung dieser Untersuchungen zur Verfügung steht. Die aus dem Beispiel ersichtliche Anordnung der Zahlen und die Verwendung verschiedenfarbiger Tinten macht es möglich, auch ohne besonderen Vordruck die zu einem Argument gehörige Phase rasch aufzufinden.

Bei der Addition wurden die zu summierenden Karten in einem schmalen Rahmen schindelartig in der Weise übereinander gelegt, daß die Wasserstandszeile noch voll sichtbar blieb. Dann wurde, um Verschiebungen zu verhüten, ein langer Glasstreifen von der Breite der Karten darüber gelegt. Die solchergestalt vorbereitete Kartenreihe weist also für die Wasserstände drei Spalten auf, die anfänglich sämtlich der Summation unterworfen wurden, um Versehen zu entdecken, die in den Zahlen der dritten Spalte stehen geblieben sein konnten. Später genügte es, nur die dritte Spalte zu summieren.

§ 7. Die Benutzung der Karten erweist sich namentlich dann als angenehm, wenn man zwei Argumente gleichzeitig berücksichtigen will. Ordnet man z. B. erst nach den Phasen der Sonnenlänge S, so entstehen zwanzig Pakete, die durchschnittlich 340 Karten enthalten. Ordnet man darauf jedes

Paket nach der Mondlänge L, so entstehen im Ganzen 400 Päckchen von durchschnittlich 17 Karten, die dasselbe Phasenpaar von S und L enthalten. Summiert man nunmehr jedes Päckchen für sich, so lassen sich aus den hierbei entstehenden Teilsummen durch passendes Zusammenlegen die H-Größen sowohl für S, als auch für L ableiten, und man erspart damit bei der vorliegenden Beobachtungsreihe die Summation von reichlich 6000 Posten.

Anfänglich wurde auch daran gedacht, die Teilsummen zur Berechnung der H-Größen für Argumentkombinationen zu verwenden. Bezeichnet man, um bei den Argumenten S und L zu bleiben, die Phasen mit S_0 und L_0, so ist die Phase des Arguments $S + L$ durch die Summe $S_0 + L_0$ gegeben. Man könnte also aus den Teilsummen für die Argumentpaare S, L durch passende Zusammenlegung sofort auch die H-Größen für $S + L$ und ebenso für $S - L$ erhalten. In Wirklichkeit ist jedoch dieses Verfahren nur mit einiger Vorsicht anzuwenden. Denn da die Phasen S_0 und L_0 auf volle Einheiten abgerundet sind, so kann es vorkommen, daß die Summe $S_0 + L_0$ um eine volle Einheit von dem richtigen für $S + L$ anzusetzenden Phasenwerte abweicht. Dieser Fehler der Abrundung macht sich, wie ein Versuch gelehrt hat, in der Tat sehr bemerkbar, sobald man bei der Entwicklung nach dem kombinierten Argument über den einfachen Winkel hinausgeht. Es empfiehlt sich daher, die Argumentkombination nur da zu benutzen, wo es sich um eine vorläufige Schätzung der niedrigsten Koeffizienten der trigonometrischen Entwickelung handelt.

§ 8. Da die Argumente die Gestalt $N = nt$ besitzen, also für $t = 0$ verschwinden, und da ferner t die Zahlenreihe 0, 1, 2, . . durchläuft, so entstehen die zu N gehörigen abge-

rundeten Phasenwerte, wenn man der Reihe nach die Zahlen n, $2n$, $3n$, . . bildet und unter Abwerfung der Vielfachen von 20 auf ganze Zahlen abrundet. Diese Arbeit geht mit der Thomas'schen Rechenmaschine glatt von statten und ist für die rascheren Argumente auch auf diesem Wege ausgeführt worden. Für die langsameren Argumente hingegen, bei denen der abgerundete Phasenwert für eine längere Reihe von Tagen fest bleibt, habe ich es — um Versehen beim Abzählen der Kurbeldrehungen zu vermeiden — vorgezogen, die Wechselepochen der Phase zu tabulieren, d. h. für jedes Argument eine Ephemeride der Zeitpunkte aufzustellen, für welche die Phase um eine Einheit springt. Diese Ephemeridenrechnung ließ sich mit der Rechenmaschine ebenfalls rasch erledigen.

§ 9. Ueber den Rechnungsgang, dessen Verlauf in der Hauptsache aus den vorher gegangenen Bemerkungen ersichtlich ist, möge zur Vervollständigung noch folgendes bemerkt werden. Ordnet man die Karten nach den Wertepaaren zweier Argumente N_a und N_b und bildet zu den 400 Phasenpaaren zunächst die Teilsummen, so kann man bei der Zusammenlegung der Teilsummen zwei Wege einschlagen. Erstlich kann man aus einer Teilsumme durch Division mit der Anzahl der Summanden das entsprechende „Teilmittel“ herleiten und darauf die zwanzig zu einer Phase von N_a oder N_b gehörigen Teilmittel in einen Mittelwert zusammenziehen. Wo dies geschehen ist, soll im folgenden von dem Rechnen mit Teilmitteln gesprochen werden. Zweitens kann man die Teilsummen ohne vorhergehende Division für die einzelnen Phasen von N_a oder N_b zusammenlegen und dann die Mittelbildung vornehmen. Dieser Weg wird weiterhin als das Rechnen mit Gesamtmitteln bezeichnet werden.

Der zweite Weg ist, wie leicht zu sehen, stets gangbar. Dagegen kann es bei dem ersten Wege vorkommen, daß gewisse Phasenpaare und folgeweise die zugehörigen Teilsummen und Teilmittel ausfallen, sodaß die Rechnung mit den Teilmitteln bedeutungslos wird.

Die Ausscheidung der sporadischen Fälle.

§ 10. Hagen benutzt in seiner Abhandlung von dem gesamten damals vorliegenden Beobachtungsmaterial nur ungefähr ein Drittel; einen Teil der Pegelablesungen mußte er als offensichtlich unbrauchbar oder als mindestens verdächtig ausschließen, einen anderen Teil unterdrückte er wegen der Unruhe des Wassers bei der Ablesung des Pegels, indem er davon ausging, daß Ablesungen, die um mehrere Zolle unsicher sind, nicht wohl zur Ermittelung einer Schwankung dienen können, deren Größe von der Ordnung des Zolles ist. Es ist nicht erforderlich, die Zuläßigkeit des Hagen'schen Verfahrens im einzelnen zu erörtern, da die von ihm vorgenommene Auslese für unsere Aufgabe überhaupt nicht in Betracht kommen kann. Dagegen ist der Grundgedanke unzweifelhaft richtig, denn wenn es sich um die Ermittelung kleiner periodischer Schwankungen des Wassers handelt, so darf z. B. der Wasserstand einer Sturmflut sicher nicht mitsprechen. Zur Klarstellung möge die folgende Betrachtung dienen, bei der ich nach dem Vorgange von Bruns als „sporadische Fälle“ die vereinzelt auftretenden Extreme bezeichnen will, die ihre Entstehung einem außergewöhnlichen Zusammentreffen von Umständen verdanken.

Handelt es sich nur um die zusammenfassende numerische Beschreibung eines Vorganges — hier des Spieles der Wasserstände — so wird man die sporadischen Fälle im

allgemeinen mitnehmen, da ihr Auftreten mit zur Charakteristik des Vorganges gehört. Wird im besonderen als Bestandteil der Beschreibung das Mittelwasser herangezogen, so wird man in dieses Mittel die sporadischen Fälle einschließen, wie das auch in den Arbeiten von Seibt und Westphal geschehen ist. Will man hingegen bestimmten Gesetzmäßigkeiten — hier den periodischen Schwankungen des Wasserstandes — nachspüren, so ist es angebracht, die sporadischen Fälle auszuschließen, da sie der gesuchten Gesetzmäßigkeit geradezu widersprechen.

Demnach handelt es sich jetzt darum, bei der vorliegenden Beobachtungsreihe die „Toleranzen", d. h. die Grenzen zwischen den normalen und den außernormalen oder sporadischen Fällen in annehmbarer Weise festzusetzen. Betrachtet man nun die Gesamtheit der vorliegenden Wasserstände als eine Kollektivreihe, deren normaler Verlauf nach den Grundsätzen der allgemeinen Kollektivmaßlehre zu beurteilen ist, so hat man zu beachten, daß der Wasserstand in erster Linie von Wind und Wetter abhängt, und daß die Witterung in allen ihren Elementen eine ausgesprochene jährliche Schwankung aufweist. Daher hat man auch bei der Verteilung der Wasserstände im voraus mit einem jährlichen Gange zu rechnen und demgemäß das Beobachtungsmaterial in geeigneter Weise nach der Jahreszeit zu spalten. Nachstehend ist der Rechnungsgang dargelegt, wobei ich bezüglich der Namen und Zeichen auf das Werk von Bruns „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre" verweise.

Bedeutet n für den Augenblick die tägliche Bewegung der mittleren Sonnenlänge, so ist das Argument $N = nt$ die Länge der mittleren Sonne — gerechnet von dem Sonnenorte für die Epoche $t = 0$ aus. — Den zwanzig abgerundeten

Phasen von N entsprechen dann Zeitstrecken von 18 bis 19 Tagen Dauer, deren Mitten genähert auf die Monatstage

Januar 1, Januar 19, Februar 6, ...

fallen. Sucht man des weiteren die Karten heraus, die zu den einzelnen Phasen von N gehören, so erhält man zwanzig Kollektivreihen, deren Umfang durchschnittlich 347 ist. Für diese Reihen, deren Argument für den Augenblick mit x bezeichnet werden möge, habe ich nun den Argumentdurchschnitt $\mathfrak{D}(x)$ und die Streuung $\mathrm{str}(x)$ berechnet und dabei zur Abkürzung der Rechnung die ursprünglich nur 1 mm langen Teilstrecken von x in längere Strecken von 120 mm zusammengefaßt. Da sich ferner aus dem Aussehen der Verteilungstafeln auch ohne besondere Rechnung entnehmen ließ, daß die aufgestellten Kollektivreihen im wesentlichen dem einfachen Exponentialgesetz folgen, so habe ich die beiden Toleranzen g und k nach den Formeln

$$g = \mathfrak{D}(x) + 3\,\mathrm{str}(x), \qquad k = \mathfrak{D}(x) - 3\,\mathrm{str}(x)$$

angesetzt, also alle Fälle als sporadisch behandelt, die um mehr als das Dreifache der Streuung von dem Argumentdurchschnitt entfernt sind. Die einzelnen Wertepaare von g und k sind — in Millimetern ausgedrückt — nachstehend für die zwanzig Phasen von N zusammengestellt.

0	1	2	3	4	5	6
g + 794	+ 617	+ 769	+ 681	+ 568	+ 398	+ 275
k — 867	— 859	— 839	— 831	— 752	— 616	— 523

7	8	9	10	11	12	13
g + 297	+ 215	+ 343	+ 319	+ 377	+ 402	+ 426
k — 543	— 415	— 431	— 359	— 331	— 312	— 402

	14	15	16	17	18	19
g	+ 490	+ 508	+ 721	+ 676	+ 755	+ 800
k	— 434	— 530	— 767	— 806	— 895	— 850

Das Mittel eines jeden Paares g, k liefert den zugehörigen Wert von $\mathfrak{D}(x)$, während jede Differenz $g - k$ gleich der sechsfachen zugehörigen Streuung ist. Bemerkenswert ist die starke Schwankung der Streuung: das Maximum und Minimum von $6\,\mathrm{str}(x)$ tritt mit 1661 mm bei Phase 0 und mit 630 mm bei Phase 8 ein, während in den Werten von $\mathfrak{D}(x)$ der jährliche Gang des Mittelwassers zum Ausdruck kommt.

Die angegebenen Toleranzen lieferten 61 sporadische Fälle. Diese Anzahl ist nicht ganz 1 % der Gesamtreihe und darf nach den Erfahrungen, die man bei anderen Kollektivreihen gemacht hat, als durchaus plausibel angesehen werden.

Da die Lücken, die durch das Auslassen der sporadischen oder außernormalen Wasserstände entstehen, für gewisse, ursprünglich beabsichtigte Rechnungen unbequem gewesen wären, so habe ich sie durch geradlinige Interpolation zwischen den anliegenden normalen Wasserständen überbrückt. Dieses Verfahren ist nicht ganz frei von Willkür, indessen dürfte der dadurch erzeugte Fehler immer noch merklich kleiner sein als der störende Einfluß der sporadischen Fälle, wenn man diese mitgenommen hätte. Materiell hat übrigens die mit den 61 sporadischen Fällen vorgenommene Aenderung wenig zu bedeuten, da die Sprünge, die den meisten weiterhin behandelten Kurven noch anhaften, für die Vertrauenswürdigkeit der errechneten Werte der gesuchten Unbekannten weit nachteiliger sind als die Einwirkung der sporadischen Fälle oder ihrer Abänderung. Diese Tatsache ließ sich allerdings nicht wohl voraussehen.

Das System der Argumente.

§ 11. Mustert man die Argumente, die für die vorliegende Aufgabe in Betracht kommen, summarisch durch, so erkennt man leicht, daß vorderhand nur die von der Gravitationsflut des Mondes herrührenden Argumente einer besonderen Erörterung bedürfen. Denn die Sonnenflut bringt, da es sich hier um Mittagsablesungen handelt, als Argument nur die mittlere Sonnenlänge hinein, die man ohnehin wegen der jährlichen Schwankung der Witterung einzuführen hat. Ferner genügt es bei den von der Libration der Erdachse herrührenden Schwankungen die Werte der Euler'schen und der Chandler'schen Periode auf Grund der anderweit ermittelten Zahlen oder auch vorläufig rein hypothetisch anzusetzen.

Zur Aufsuchung der Mondargumente dient das fluterzeugende Potential des Mondes. Entwickelt man dieses Potential in bekannter Weise nach Kugelfunktionen und geht bis zur dritten Kugelfunktion, so erhält man einen Ausdruck von der Gestalt

$$V = Cr^2R^{-3}(3\cos D^2 - 1) + Cr^3R^{-4}(5\cos D^3 - 3\cos D).$$

Hierin ist C ein konstanter Faktor, r der geozentrische Radiusvektor des Beobachtungsortes, R der Radiusvektor des Mondes und D der Abstand des Mondes von dem geozentrischen Zenit des Beobachters. Da es hier bei der Entwickelung von V nur auf die relative Größenordnung der Koeffizienten ankommt, so denke man sich den Faktor C so gewählt, daß das Produkt Cr^2R^{-3} den durchschnittlichen Betrag 0.5 besitzt. Es ist dann in V das Maximum des ersten Terms gleich Eins, das Maximum des zweiten dagegen von der Ordnung der Mondparallaxe.

Bedeuten l und b die ekliptische Länge und Breite des Mondes, l' und b' die ekliptische Länge und Breite des geozentrischen Zenits, so wird

$$\cos D = \sin b \,.\, \sin b' + \cos b \,.\, \cos b' \,.\, \cos (l - l').$$

Die Größen l und b sind bestimmt durch die wahre Länge M des Mondes in seiner Bahn, sowie durch die Länge P des Mondperigäums und die Länge K des aufsteigenden Mondknotens. Von denselben Winkeln hängt auch der Radiusvektor R ab, dessen Potenzen in V auftreten. Ferner sind die Größen l' und b' bestimmt durch die Deklination des geozentrischen Zenits und durch seine Rektaszension S. Für die Größe S darf man, da es sich um Mittagsablesungen handelt, die Sternzeit im mittleren Mittag setzen, die bis auf die hier belanglosen Nutationsglieder mit der mittleren tropischen Länge der Sonne zusammenfällt. Hiernach können also aus der Mondflut Glieder entspringen, die von der Sonnenlänge abhängen.

Statt der wahren Mondlänge M ist nun noch die mittlere Mondlänge L einzuführen, und zwar unter Berücksichtigung der von L und P abhängenden Mittelpunktsgleichung. Außerdem habe ich bei dieser Umformung noch die Hauptglieder der Evektion und Variation herangezogen. Entwickelt man nun daraufhin das Potential V nach den Winkeln L, P, K, S, so hängen die Koeffizienten von der mittleren Mondparallaxe p, sowie von der Exzentrizität e und der Neigung J der Mondbahn ab. Ich habe diese Koeffizienten nach den Potenzen der kleinen Größen p, e, J entwickelt und — außer den von p, e, J freien Gliedern — alle Glieder mitgenommen, die mit den Faktoren

$$p,\ e,\ J,\ pe,\ pJ,\ ee,\ eJ,\ JJ,$$

behaftet sind. Glieder mit dem Faktor pp treten nicht auf,

da sie nur aus der hier nicht mehr mitgenommenen vierten Kugelfunktion entspringen können.

§ 12. Die nicht gerade schwierige, aber ziemlich weitläuftige Entwicklung soll hier nicht durchgerechnet werden, da es genügen dürfte, ihr Ergebnis mitzuteilen. In der nachstehenden Tabelle gibt die erste Spalte an, wie sich in der angegebenen trigonometrischen Entwicklung des Mondpotentials V die Argumente der einzelnen Glieder aus den vier Winkeln

L: mittlere tropische Länge des Mondes in seiner Bahn,
S: mittlere tropische Länge der Sonne,
P: tropische Länge des Mondperigäums,
K: tropische Länge des aufsteigenden Mondknotens

zusammensetzen. Die zweite Spalte ist eine Umformung der ersten vermittelst der Substitution

$$L = T + S.$$

Die Größe $T = L - S$ ist der mittlere Abstand Sonne-Mond in Länge, darf also, da sich S im vorliegenden Falle auf die obere Kulmination der Sonne bezieht, als der mittlere östliche Stundenwinkel des Mondes angesehen werden. Die dritte mit „Ordnung“ überschriebene Spalte gibt an, wie die Faktoren p, e, J in den Koeffizienten des betreffenden Arguments mindestens auftreten. Tritt keiner dieser Faktoren auf, so ist eine Null angesetzt. Ferner ist bei dem Argument S eine Null angesetzt, weil es — auch unabhängig von der Mondflut — durch die Sonnenflut und die jährliche Periode des Wetters erzeugt wird. Endlich besagen die Marken *ev* und *va*, daß die zugehörigen Argumente aus der Evektion oder der Variation des Mondes entspringen.

Die vierte Spalte enthält die mit den Konstanten der Hansen'schen Mondtafeln berechneten täglichen Bewegungen der einzelnen Argumente, und zwar in Teilen des Kreisumfanges ausgedrückt. Der reziproke Wert der täglichen Bewegung liefert die in Tagen ausgedrückte Periode der Bewegung und ist in der letzten Spalte angesetzt, während die vorletzte Spalte die Anzahl der Umläufe angibt, die das einzelne Argument innerhalb der hier benutzten neunzehnjährigen Reihe ausgeführt hat.

Arg.	Arg.	Ord.	Tägl. Beweg.	Uml.	Pde.
$4L+3S-P$	$4T+7S-P$	*ep*	+0.15430868	1070.6	6.48
$4L+2S-P$	$4T+6S-P$	*ep*	+0.15157077	1051.6	6.60
$4L+2S-2P$	$4T+6S-2P$	*ee*	+0.15126132	1049.4	6.61
$4L+S-P$	$4T+5S-P$	*ep*	+0.14883286	1032.6	6.72
$4L+S-2P$	$4T+5S-2P$	*ee*	+0.14852341	1030.5	6.73
$4L$	$4T+4S$	*va*	+0.14640441	1015.8	6.83
$4L-P$	$4T+4S-P$	*ep*	+0.14609496	1013.6	6.84
$4L-2P$	$4T+4S-2P$	*ee*	+0.14578550	1011.5	6.86
$4L-S$	$4T+3S$	*va*	+0.14366650	996.8	6.96
$4L-S-P$	$4T+3S-P$	*ep*	+0.14335705	994.6	6.98
$4L-S-2P$	$4T+3S-2P$	*ee*	+0.14304759	992.5	6.99
$4L-2S$	$4T+2S$	*va*	+0.14092859	977.8	7.10
$4L-2S-P$	$4T+2S-P$	*ep*	+0.14061914	975.6	7.11
$4L-2S-2P$	$4T+2S-2P$	*ee*	+0.14030968	973.5	7.13
$4L-3S$	$4T+S$	*va*	+0.13819068	958.8	7.24
$4L-3S-P$	$4T+S-P$	*ep*	+0.13788123	956.6	7.25
$4L-4S$	$4T$	*va*	+0.13545277	939.8	7.38
$3L+3S-K$	$3T+6S-K$	*Jp*	+0.11816413	819.8	8.46
$3L+3S$	$3T+6S$	*p*	+0.11801704	818.8	8.47
$3L+2S-K$	$3T+5S-K$	*Jp*	+0.11542622	800.8	8.66
$3L+2S$	$3T+5S$	*p*	+0.11527913	799.8	8.67

Arg.	Arg.	Ord.	Tägl. Beweg.	Uml.	Pde.
$3L+2S-P-K$	$3T+5S-P-K$	*eJ*	+0.11511677	798.7	8.69
$3L+2S-P$	$3T+5S-P$	*e*	+0.11496967	797.7	8.70
$3L+S-K$	$3T+4S-K$	*Jp*	+0.11268831	781.8	8.87
$3L+S$	$3T+4S$	*p*	+0.11254122	780.8	8.89
$3L+S-P-K$	$3T+4S-P-K$	*eJ*	+0.11237886	779.7	8.90
$3L+S-P$	$3T+4S-P$	*e*	+0.11223176	778.7	8.91
$3L+P$	$3T+3S+P$	*ev*	+0.11011276	764.0	9.08
$3L-K$	$3T+3S-K$	*Jp*	+0.10995040	762.8	9.10
$3L$	$3T+3S$	*p*	+0.10980331	761.8	9.11
$3L-P-K$	$3T+3S-P-K$	*eJ*	+0.10964095	760.7	9.12
$3L-P$	$3T+3S-P$	*e*	+0.10949385	759.7	9.13
$3L-S+P$	$3T+2S+P$	*ev*	+0.10737485	745.0	9.31
$3L-S-K$	$3T+2S-K$	*Jp*	+0.10721249	743.8	9.33
$3L-S$	$3T+2S$	*p*	+0.10706540	742.8	9.34
$3L-S-P-K$	$3T+2S-P-K$	*eJ*	+0.10690304	741.7	9.35
$3L-S-P$	$3T+2S-P$	*e*	+0.10675594	740.7	9.37
$3L-2S+P$	$3T+S+P$	*ev*	+0.10463695	726.0	9.56
$3L-2S-K$	$3T+S-K$	*Jp*	+0.10447458	724.8	9.57
$3L-2S$	$3T+S$	*p*	+0.10432749	723.8	9.59
$3L-2S-P-K$	$3T+S-P-K$	*eJ*	+0.10416513	722.7	9.60
$3L-2S-P$	$3T+S-P$	*e*	+0.10401803	721.7	9.61
$3L-3S+P$	$3T+P$	*ev*	+0.10189904	707.0	9.81
$3L-3S-K$	$3T-K$	*Jp*	+0.10173668	705.8	9.83
$3L-3S$	$3T$	*p*	+0.10158958	704.8	9.84
$3L-4S+P$	$3T-S+P$	*ev*	+0.09916113	688.0	10.08
$2L+3S+P$	$2T+5S+P$	*ep*	+0.08172539	567.0	12.24
$2L+3S-P$	$2T+5S-P$	*ep*	+0.08110648	562.7	12.33
$2L+2S+P$	$2T+4S+P$	*ep*	+0.07898748	548.0	12.66
$2L+2S-2K$	$2T+4S-2K$	*JJ*	+0.07897221	547.9	12.66
$2L+2S-K$	$2T+4S-K$	*J*	+0.07882512	546.9	12.69

Arg.	Arg.	Ord.	Tägl. Beweg.	Uml.	Pde.
$2L+2S$	$2T+4S$	o	+0.07867802	545.9	12.71
$2L+2S-P$	$2T+4S-P$	*ep*	+0.07836857	543.7	12.76
$2L+2S-2P$	$2T+4S-2P$	*ee*	+0.07805911	541.6	12.81
$2L+S+P$	$2T+3S+P$	*ep*	+0.07624957	529.0	13.12
$2L+S-2K$	$2T+3S-2K$	*JJ*	+0.07623430	528.9	13.12
$2L+S-K$	$2T+3S-K$	*J*	+0.07608721	527.9	13.14
$2L+S$	$2T+3S$	o	+0.07594011	526.9	13.17
$2L+S-P$	$2T+3S-P$	*ep*	+0.07563066	524.7	13.22
$2L+S-2P$	$2T+3S-2P$	*ee*	+0.07532120	522.6	13.28
$2L+P$	$2T+2S+P$	*ep*	+0.07351166	510.0	13.60
$2L-2K$	$2T+2S-2K$	*JJ*	+0.07349639	509.9	13.61
$2L-K$	$2T+2S-K$	*J*	+0.07334930	508.9	13.63
$2L$	$2T+2S$	o	+0.07320221	507.9	13.66
$2L-P$	$2T+2S-P$	*ep*	+0.07289275	505.7	13.72
$2L-2P$	$2T+2S-2P$	*ee*	+0.07258329	503.6	13.78
$2L-S+P$	$2T+S+P$	*ep*	+0.07077375	491.0	14.13
$2L-S-2K$	$2T+S-2K$	*JJ*	+0.07075849	490.9	14.13
$2L-S-K$	$2T+S-K$	*J*	+0.07061139	489.9	14.16
$2L-S$	$2T+S$	o	+0.07046429	488.9	14.19
$2L-S-P$	$2T+S-P$	*ep*	+0.07015484	486.7	14.25
$2L-S-2P$	$2T+S-2P$	*ee*	+0.06984539	484.6	14.32
$2L-2S+P$	$2T+P$	*ep*	+0.06803584	472.0	14.70
$2L-2S-2K$	$2T-2K$	*JJ*	+0.06802058	471.9	14.70
$2L-2S-K$	$2T-K$	*J*	+0.06787348	470.9	14.73
$2L-2S$	$2T$	o	+0.06772639	469.9	14.76
$2L-2S-P$	$2T-P$	*ep*	+0.06741693	467.7	14.83
$2L-2S-2P$	$2T-2P$	*ee*	+0.06710748	465.6	14.90
$2L-3S+P$	$2T-S+P$	*ep*	+0.06529793	453.0	15.31
$2L-3S$	$2T-S$	*va*	+0.06498848	450.9	15.39
$2L-3S-P$	$2T-S-P$	*ep*	+0.06467902	448.7	15.46

Arg.	Arg.	Ord.	Tägl. Beweg.	Uml.	Pde.
$2L-4S$	$2T-2S$	*va*	+0.06225057	431.9	16.06
$L+4S-P$	$T+5S-P$	*ev*	+0.04724328	327.8	21.17
$L+3S-K$	$T+4S-K$	*Jp*	+0.04496193	312.0	22.24
$L+3S$	$T+4S$	*p*	+0.04481483	310.9	22.31
$L+3S+K$	$T+4S+K$	*Jp*	+0.04466774	309.9	22.39
$L+3S-P$	$T+4S-P$	*ev*	+0.04450537	308.8	22.47
$L+2S+P-K$	$T+3S+P-K$	*eJ*	+0.04253347	295.1	23.51
$L+2S+P$	$T+3S+P$	*e*	+0.04238638	294.1	23.59
$L+2S-K$	$T+3S-K$	*Jp*	+0.04222402	293.0	23.68
$L+2S$	$T+3S$	*p*	+0.04207692	291.9	23.77
$L+2S+K$	$T+3S+K$	*Jp*	+0.04192983	290.9	23.85
$L+2S-P-K$	$T+3S-P-K$	*eJ*	+0.04191456	290.8	23.86
$L+2S-P$	$T+3S-P$	*e*	+0.04176747	289.8	23.94
$L+2S-P+K$	$T+3S-P+K$	*eJ*	+0.04162037	288.8	24.03
$L+S+P-K$	$T+2S+P-K$	*eJ*	+0.03979556	276.1	25.13
$L+S+P$	$T+2S+P$	*e*	+0.03964847	275.1	25.22
$L+S-K$	$T+2S-K$	*Jp*	+0.03948611	274.0	25.32
$L+S$	$T+2S$	*p*	+0.03933901	272.9	25.42
$L+S+K$	$T+2S+K$	*Jp*	+0.03919192	271.9	25.52
$L+S-P-K$	$T+2S-P-K$	*eJ*	+0.03917665	271.8	25.52
$L+S-P$	$T+2S-P$	*e*	+0.03902956	270.8	25.62
$L+S-P+K$	$T+2S-P+K$	*eJ*	+0.03888246	269.8	25.72
$L+P-K$	$T+S+P-K$	*eJ*	+0.03705765	257.1	26.98
$L+P$	$T+S+P$	*e*	+0.03691056	256.1	27.09
$L-K$	$T+S-K$	*Jp*	+0.03674820	255.0	27.21
L	$T+S$	*p*	+0.03660110	253.9	27.32
$L+K$	$T+S+K$	*Jp*	+0.03645401	252.9	27.43
$L-P-K$	$T+S-P-K$	*eJ*	+0.03643874	252.8	27.44
$L-P$	$T+S-P$	*e*	+0.03629165	251.8	27.56
$L-P+K$	$T+S-P+K$	*eJ*	+0.03614455	250.8	27.67

Arg.	Arg.	Ord.	Tägl. Beweg.	Uml.	Pde.
$L-S+P-K$	$T+P-K$	*eJ*	+0.03431974	238.1	29.14
$L-S+P$	$T+P$	*e*	+0.03417265	237.1	29.26
$L-S-K$	$T-K$	*Jp*	+0.03401029	236.0	29.40
$L-S$	T	*p*	+0.03386319	234.9	29.53
$L-S+K$	$T+K$	*Jp*	+0.03371610	233.9	29.66
$L-S-P-K$	$T-P-K$	*eJ*	+0.03370083	233.8	29.67
$L-S-P$	$T-P$	*e*	+0.03355374	232.8	29.80
$L-S-P+K$	$T-P+K$	*eJ*	+0.03340664	231.8	29.93
$L-2S+P-K$	$T-S+P-K$	*eJ*	+0.03158183	219.1	31.66
$L-2S+P$	$T-S+P$	*e*	+0.03143474	218.1	31.81
$L-2S-K$	$T-S-K$	*Jp*	+0.03127238	217.0	31.98
$L-2S$	$T-S$	*p*	+0.03112528	216.0	32.13
$L-2S+K$	$T-S+K$	*Jp*	+0.03097819	214.9	32.28
$L-2S-P-K$	$T-S-P-K$	*eJ*	+0.03096292	214.8	32.30
$L-2S-P$	$T-S-P$	*e*	+0.03081583	213.8	32.45
$L-2S-P+K$	$T-S-P+K$	*eJ*	+0.03066873	212.8	32.61
$L-3S+P$	$T-2S+P$	*ev*	+0.02869683	199.1	34.85
$L-3S-K$	$T-2S-K$	*Jp*	+0.02853447	198.0	35.04
$L-3S$	$T-2S$	*p*	+0.02838738	197.0	35.23
$L-3S+K$	$T-2S+K$	*Jp*	+0.02824028	195.9	35.41
$L-4S+P$	$T-3S+P$	*ev*	+0.02595892	180.1	38.52
$4S$	$4S$	*va*	+0.01095164	76.0	91.31
$3S+P$	$3S+P$	*ep*	+0.00852318	59.1	117.33
$3S$	$3S$	*va*	+0.00821373	57.0	121.75
$3S-P$	$3S-P$	*ep*	+0.00790427	54.8	126.51
$2S+2P$	$2S+2P$	*ee*	+0.00609473	42.3	164.08
$2S+P$	$2S+P$	*ep*	+0.00578527	40.1	172.85
$2S-2K$	$2S-2K$	*JJ*	+0.00577001	40.0	173.31
$2S-K$	$2S-K$	*J*	+0.00562291	39.0	177.84
$2S$	$2S$	0	+0.00547582	38.0	182.62

Arg.	Arg.	Ord.	Tägl. Beweg.	Uml.	Pde.
$2S+K$	$2S+K$	J	+0.00532872	37.0	187.66
$2S+2K$	$2S+2K$	JJ	+0.00518163	36.0	192.99
$2S-P$	$2S-P$	ep	+0.00516636	35.8	193.56
$2S-2P$	$2S-2P$	ee	+0.00485691	33.7	205.89
$S+2P$	$S+2P$	ee	+0.00335682	23.3	297.90
$S+P$	$S+P$	pe	+0.00304736	21.1	328.15
$S-2K$	$S-2K$	JJ	+0.00303210	21.0	329.80
$S-K$	$S-K$	J	+0.00288500	20.0	346.62
S	S	0	+0.00273791	19.0	365.24
$S+K$	$S+K$	J	+0.00259081	18.0	385.98
$S+2K$	$S+2K$	JJ	+0.00244372	17.0	409.21
$S-P$	$S-P$	pe	+0.00242845	16.8	411.79
$S-2P$	$S-2P$	ee	+0.00211900	14.7	471.92
$2P$	$2P$	ee	+0.00061891	4.3	1615.7
P	P	pe	+0.00030946	2.2	3231.5
K	K	J	−0.00014709	1.0	6798.4
$2K$	$2K$	JJ	−0.00029419	2.0	3399.2

§ 13. Das Ergebnis der Rechnung ist vorstehend ausführlich mitgeteilt worden, weil es für spätere Untersuchungen unter Umständen von Nutzen sein kann. Es läßt erkennen, wie verwickelt der Verlauf der Mondflut wird, sobald man die kleineren Glieder mit berücksichtigt. Allerdings könnte es scheinen, daß mindestens die Anführung der Glieder, die in p, e, J von der zweiten Dimension sind, zwecklos sei und einen unnötigen Ballast darstelle. Hierzu ist jedoch folgendes zu bemerken. Wenn man Schwankungen nachspüren will, die ähnlich wie die Chandler'sche Flut nur etliche Millimeter betragen, so ist es nicht ratsam, Mondglieder, die von derselben Größenordnung sein könnten, von vornherein auszuschließen.

Da die Argumente in der Tabelle nach der täglichen Bewegung geordnet sind, so lassen sich sofort die Fälle mit nahezu gleichen Bewegungen herausfinden. Hierher gehören namentlich die Argumente, deren Differenz die Gestalt $P+2K$ hat, denn die entsprechende Differenz der täglichen Bewegungen besitzt den Wert

$$0.00001527,$$

führt also erst in rund 65500 Tagen oder 179 Jahren einen Umlauf aus. Solche Argumente lassen sich daher selbst bei einer hundertjährigen Beobachtungsreihe kaum von einander trennen.

§ 14. Im folgenden sind die Argumente zusammengestellt, deren Untersuchung ursprünglich in Aussicht genommen war, und für die daher die Phasenwerte in die Karten eingetragen wurden. Im weiteren Verlaufe der Arbeit ist allerdings diese Untersuchung nur zum Teil durchgeführt worden, und zwar deshalb, weil sich herausstellte, daß die störende Wirkung der langsameren aperiodischen Schwankungen des Wasserstandes in einer neunzehnjährigen Reihe noch nicht genügend ausgeglichen wird.

Aufgenommen sind die Argumente, bei denen größere Koeffizienten zu erwarten waren, ferner die Argumente, deren Periode oberhalb 297.90 liegt. Des weiteren wurde mit sechs hypothetischen Argumenten $E(1), \ldots E(6)$ die Argumentreihe

$$E(1),\ E(2),\ E(3),\ S+2P,\ E(4),\ E(5),\ E(6)$$

angesetzt, deren Perioden um je drei Tage von einander abstehen und in der Nähe der Euler'schen Periode liegen. In ähnlicher Weise wurde die Argumentreihe

$$C(1),\ C(2),\ C(3),\ C(4),\ C(5),\ C(6),\ C(7)$$

mit den Perioden

$$419,\ 423,\ 427,\ 431,\ 435,\ 439,\ 443$$

gebildet, deren Mittelglied die von Bakhuyzen ermittelte Chandler'sche Periode besitzt. Hierzu treten dann noch einige weitere Argumente, die dazu dienen sollten, durch Kombination mit den vorher genannten nach dem in § 7 angegebenen Verfahren sämtliche Mondglieder erster Ordnung und die Mehrzahl der Glieder zweiter Ordnung zu bestimmen. Dieses Verfahren ist jedoch nur zur Probe angewendet worden, weil sich herausstellte, daß sich der Abrundungsfehler der Phasen schon bei dem zweifachen Winkel störend geltend macht.

Die erste Spalte der nachstehenden Tabelle enthält die Argumente, wobei $-N$ für K gesetzt worden ist. Die übrigen Spalten sind nach den Angaben über die frühere Tabelle unmittelbar verständlich. Die Reihenfolge entspricht der Anordnung der Phasen auf den Karten. Außerdem mag noch erwähnt werden, daß die Argumente

$$T,\ T+S,\ T+2S$$

in dem Potential der Mondflut-Koeffizienten erster Ordnung besitzen, daß jedoch die doppelten Argumente zu Gliedern nullter Ordnung gehören.

Arg.	Ord.	Tägl. Bewg.	Uml.	Pde.
$E(1)$	—	0.00346139	24.0	288.90
$E(2)$	—	0.00342582	23.8	291.90
$E(3)$	—	0.00339097	23.5	294.90
$S+2P$	*ee*	0.00335682	23.3	297.90
$E(4)$	—	0.00332335	23.1	300.90
$E(5)$	—	0.00329055	22.8	303.90

Arg.	Ord.	Tägl. Bewg.	Uml.	Pde.
$E(6)$	—	0.00325838	22.6	306.90
$S+P$	*pe*	0.00304736	21.1	328.15
$S+2N$	*JJ*	0.00303210	21.0	329.80
$S+N$	*J*	0.00288500	20.0	346.62
S	o	0.00273791	19.0	365.24
$S-N$	*J*	0.00259081	18.0	385.98
$S-2N$	*JJ*	0.00244372	17.0	409.21
$S-P$	*pe*	0.00242845	16.8	411.78
$C(1)$	—	0.00238663	16.6	419.00
$C(2)$	—	0.00236407	16.4	423.00
$C(3)$	—	0.00234192	16.2	427.00
$C(4)$	—	0.00232019	16.1	431.00
$C(5)$	—	0.00229885	16.0	435.00
$C(6)$	—	0.00227790	15.8	439.00
$C(7)$	—	0.00225734	15.7	443.00
$S-2P$	*ee*	0.00211900	14.7	471.92
$2P$	*ee*	0.00061891	4.3	1615.74
P	*pe*	0.00030946	2.2	3231.48
N	*J*	0.00014709	1.0	6798.35
$2N$	*JJ*	0.00029419	2.0	3399.18
$P+N$	—	0.00045655	3.2	2190.34
$P-N$	—	0.00016236	1.1	6159.11
$3T+2S$	*p*	0.10706540	742.8	9.34
$3T+S$	*p*	0.10432749	723.8	9.59
$2T+3S$	o	0.07594011	526.9	13.17
$2T+S$	o	0.07046429	488.9	14.19
$T+3S-P$	*e*	0.04176747	289.8	23.94
$T+2S$	*p*	0.03933901	272.9	25.42
$T+S$	*p*	0.03660110	253.9	27.32
T	*p*	0.03386319	234.9	29.53

Die Ausgleichung.

§ 15. Für jedes zur Untersuchung herausgegriffene Argument liefert der früher beschriebene Rechnungsgang ein System von zwanzig Normalgleichungen von der Gestalt

$$H(x) = c_0 + c_1 \cos x + s_1 \sin x + \ldots,$$

worin x die zwanzig Phasenwerte des Arguments anzunehmen hat. Stellt man nun den Verlauf der $H(x)$ graphisch dar, so weisen die Kurven in den meisten Fällen starke Zacken auf, d. h. die H-Größen enthalten meistens noch ansehnliche unausgeglichene Reste der aperiodischen Schwankungen, obgleich jedes H durchschnittlich auf 347 Einzelwerten beruht. Auf der andern Seite ist es im voraus ziemlich sicher, daß die höheren Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung in Wirklichkeit nur ganz geringfügige Werte besitzen, und daß man deshalb bei der Bestimmung der Koeffizienten nicht sehr weit zu gehen Anlaß hat. Ich habe jedoch die Ermittelung der c, s bis zum fünffachen Winkel durchgeführt, weil hierzu nur eine geringe Mehrarbeit erforderlich ist, und das Auftreten von größeren Koeffizienten bei den Winkeln $3x$, $4x$, $5x$ auf größere Reste von aperiodischen Schwankungen in den $H(x)$ hinweist.

§ 16. Da jedes H-System zwanzig Gleichungen umfaßt, und da andrerseits höchstens elf Unbekannte c, s zu bestimmen sind, so wird eine Ausgleichung erforderlich, die wie üblich nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt worden ist. Die H-Gleichungen werden zu dem Ende als Beobachtungsgleichungen angesehen, die unabhängig von einander mit dem Gewicht Eins bestimmt worden sind. Nach den Vorschriften der *M. d. k. Q.* ergeben sich dann die neuen Normalgleichungen zu dem H-System in der Gestalt

$$20\, c_0 = \Sigma H(x),$$

$$10\, c_p = \Sigma H(x) \cos px, \quad 10\, s_p = \Sigma H(x) \sin px, \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

worin die Summation über die zwanzig Phasen von x auszudehnen ist. Hieraus folgt zunächst, daß c_0 mit dem Gewicht 20, die übrigen c, s mit dem Gewicht 10 erhalten werden; ferner sieht man, daß die Zahlenwerte und die Gewichte der c, s von der Anzahl der in der Ausgleichung mitgenommenen Unbekannten unabhängig sind. Für die Quadratsumme der übrigbleibenden Widersprüche erhält man mit den Abkürzungen

$$c_0^2 = r_0, \quad c_p^2 + s_p^2 = r_p$$

den Ausdruck

$$M = \Sigma H(x)^2 - 20 r_0 - 10 r_1 - 10 r_2 - \ldots$$

Bezeichnet man den mittleren Fehler kurz durch das Symbol mF, so erhält man die Größe $\mathrm{mF}\, H(x)$, d. h. den mF der Gewichtseinheit, wenn man M durch die Anzahl der überschüssigen Gleichungen dividiert und sodann die Wurzel auszieht.

Bei der Ausgleichung besteht hinsichtlich der Anzahl und der Reihenfolge der mitzunehmenden Unbekannten vorderhand eine gewisse Freiheit, wenn es auch nicht zweifelhaft ist, daß man das konstante Glied c_0 stets und zuerst mitzunehmen hat, und daß neben jedem c_p gleichzeitig auch das gleichnamige s_p zu bestimmen ist. Demgemäß soll jetzt angenommen werden, daß die Ausgleichung nicht sofort im vollen Umfange ausgeführt, sondern schrittweise erweitert werde und daß die Bestimmung der Unbekannten in der Ordnung

$$c_0,\ (c_a\, s_a),\ (c_b\, s_b), \ldots$$

erfolgt. Setzt man hierbei

$$\Sigma H(x)^2 = 20\,K,$$

$$K_0 = K - r_0,\ K_a = K_0 - \tfrac{1}{2} r_a,\ K_b = K_a - \tfrac{1}{2} r_b \text{ usw.}$$

und bezeichnet die Werte von mF $H(x)$ für die einzelnen Stufen der Ausgleichung mit m_0, m_a, m_b, . . , so wird

$$m_0^2 = 20\,K_0 : 19,\ m_a^2 = 20\,K_a : 17,\ m_b^2 = 20\,K_b : 15 \text{ usw.}$$

Darnach wird dann, je nachdem man bis $(c_a\, s_a)$ oder $(c_b\, s_b)$ usw. gegangen ist, die Unsicherheit der ermittelten $(c_p\, s_p)$ durch die Gleichungen

$$10\,(\text{mF}\, c_p)^2 = 10\,(\text{mF}\, s_p)^2 = m_a^2 \text{ oder} = m_b^2 \text{ usw.}$$

bestimmt. Setzt man noch

$$c_p \cos px + s_p \sin px = C_p \sin (px + D_p),$$

so erhält man nach der Regel für die Unsicherheit einer Funktion beobachteter Größen die Beziehung

$$\text{mF}\, C_p = \text{mF}\, c_p = \text{mF}\, s_p .$$

Diese Gleichung ist deswegen von Bedeutung, weil es bei der Beurteilung der Wichtigkeit eines Gliedes in erster Linie auf den Betrag von C ankommt.

Im folgenden soll die Behandlung der H-Gleichungen als Ausgleichung erster oder zweiter Art bezeichnet werden, je nachdem die Nummern a, b, . . der Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, . . entsprechen oder nicht. Bei den hier untersuchten Argumenten sind beide Arten der Ausgleichung durchgerechnet worden; bei der zweiten Art wurden die Nummern a, b, . . so gewählt, daß die Größen r_a, r_b, . . der Reihe nach abnehmen.

§ 17. In den Tabellen des Anhangs sind die Ergebnisse der für fünfzehn Argumente durchgeführten Ausgleichung

übersichtlich zusammengestellt. Die Gesamtzahl der Tabellen ist siebzehn, weil für die beiden Argumente $C(4)$ und $T \pm S$ die H-Größen auf zwei verschiedenen, in der Tabellenüberschrift angegebenen Wegen berechnet worden sind. Im einzelnen ist noch folgendes zu bemerken.

Die Maßeinheit der Koeffizienten ist 1 mm. Die beiden mit R überschriebenen Spalten geben die Reihenfolge an, nach der die Unbekannten c, s schrittweise in die Ausgleichung und die Berechnung der mF hineingezogen worden sind. Dem entsprechend bezieht sich die linke R-Spalte stets auf die erste Ausgleichungsart, die rechte R-Spalte dagegen auf die zweite. Dann folgen in der linken Hälfte die Werte der Koeffizienten c, s, C, während in der rechten Hälfte des Raumes wegen die c, s fortgelassen sind, da sich ihre Werte bereits auf der linken Hälfte, wenn auch meist in andrer Reihenfolge, vorfinden. Neben jedem C steht die Unsicherheit mF C, die sich ergibt, wenn bei der Ausgleichung außer diesem C auch die in der Tabelle vorhergehenden, aber nicht die nachfolgenden berücksichtigt worden sind. Daran schließt sich endlich die Größe mF $H(x)^2$, d. h. das Quadrat des mF der Gewichtseinheit, wie er sich ergibt, wenn man bei der Ausgleichung die unter der betreffenden Zeile auftretenden Unbekannten fortläßt.

Als Erläuterung diene folgendes Beispiel. Geht man in der Tabelle 1 für das Argument $x = 3T + S$ in der rechten R-Spalte bis zu der Nummer 5, so gehört dazu unter Berücksichtigung der vorhergehenden Nummern die Darstellung

$$H(x) = c_0 + c_2 \cos 2x + s_2 \sin 2x + c_1 \cos x + s_1 \sin x + c_5 \cos 5x + s_5 \sin 5x$$

oder in Zahlen

$$H(x) = -48.9 + 2.3 \cos 2x - 4.9 \sin 2x$$
$$- 0.8 \cos x + 4.1 \sin x$$
$$- 2.2 \cos 5x - 2.1 \sin 5x \ldots$$

Die Größe $(\mathrm{mF}\,H)^2$, d. h. das $(\mathrm{mF})^2$ der Gewichtseinheit ist 75.5, während für die angesetzten c, s, C — mit Ausnahme von c_0 — der mF den Wert 2.7 annimmt, woraus $\mathrm{mF}\,c_0$ durch Multiplikation mit $\sqrt{0.5}$ oder 0.71 hervorgeht.

Die Ergebnisse der Ausgleichung.

§ 18. Bei der Frage, ob ein Koeffizient C als reell oder nur als Rechnungsresultat anzusehen sei, kommt zunächst der zugehörige Wert von $\mathrm{mF}\,C$ in Betracht: man wird den Koeffizienten, wenn C nicht ausgesprochen größer als $\mathrm{mF}\,C$ ist, im allgemeinen beiseite lassen dürfen. Um ferner über die Bedeutung der $\mathrm{mF}\,C$ eine genauere Vorstellung zu gewinnen, kann man folgende Ueberlegung anstellen.

Sieht man das Aufundab der beobachteten Wasserstände h für den Augenblick als die Wirkung zufälliger Beobachtungsfehler an, so gehört dazu ein gewisser mF, der unter der gemachten Voraussetzung mit der Streuung $\mathrm{str}(h)$ der aus den h gebildeten Kollektivreihe zusammenfällt. Nun liefern die aus § 10 zu entnehmenden Größen $(g-k):6$ die Werte von $\mathrm{str}(h)$ für die Teilreihen, die dadurch entstehen, daß man die ganze Reihe der h nach den Zwanzigsteln des Kalenderjahres spaltet, und man erhält deshalb nach den Sätzen der Kollektivmaßlehre die Streuung der ganzen Reihe, wenn man aus jenen Teilstreuungen das quadratische Mittel bildet. Dies gibt für die ganze Reihe

$$\mathrm{mF}\,h = \mathrm{str}(h) = 200.3\ \mathrm{mm}.$$

Des weiteren ist jedes $H(x)$ das Mittel aus rund 347 Wasserständen h, so daß jedem $H(x)$ das Gewicht 347 zukommt, wenn man den h das Gewicht Eins beilegt. Da aber die Koeffizienten C, auf die $H(x)$ bezogen, das Gewicht 10 besitzen, so erhält man schließlich

$$\text{mF}\, C = \text{mF}\, h : \sqrt{3470} = 3.4 \text{ mm}.$$

An diesem Werte sind außer den aperiodischen Schwankungen auch die periodischen beteiligt, die hierbei allerdings stark zurücktreten, da selbst die ganze Amplitude der stärksten Schwankung, nämlich der jährlichen, nach den weiterhin mitgeteilten Zahlen noch merklich unter dem vorstehenden Werte mF h bleibt.

Vergleicht man jetzt den gefundenen Betrag von 3.4 mm mit den mF C, die als Ergebnis der Ausgleichung in den Tabellen angegeben sind, so zeigt sich, daß bei den raschen Argumenten, die in Tabelle 1) bis 8) behandelt sind, die mF C in ausgesprochener Weise unterhalb 3.4 mm bleiben, hingegen bei den langsamen Argumenten in Tabelle 9) bis 17) ebenso ausgesprochen darüber hinausgehen, mit Ausnahme des Arguments $S + 2P$, bei dem die mF C zwischen 2.8 und 8.4 liegen. Dieses Verhalten lehrt, daß die langsamen aperiodischen Schwankungen, bei denen zwischen Maximum und Maximum oder Minimum und Minimum Zwischenzeiten von vielen Monaten liegen, bei den raschen Argumenten — wie zu erwarten — befriedigend ausgeglichen sind, und daß die zugehörigen mF C als ein brauchbares Maß der Unsicherheit angesehen werden dürfen. Dagegen sind jene Schwankungen bei den langsamen Argumenten nur unvollkommen ausgeglichen: sie wirken wie starke systematische Beobachtungsfehler, so daß die angesetzten mF C nicht als eigentliches Unsicherheitsmaß, sondern nur als Maß der in den $H(x)$ übrigbleibenden Widersprüche anzusehen sind.

§ 19. Geht man nunmehr die Argumente im einzelnen durch, so ist unter den raschen Argumenten T das wichtigste. Die zweite Art der Ausgleichung liefert bei der günstigsten Darstellung den Ausdruck

$$-7.2\cos x - 13.9\sin x - 2.4\cos 2x + 11.8\sin 2x + 2.6\cos 4x - 0.7\sin 4x,$$

worin der Term mit dem vierfachen Winkel der Variation entspricht und wegen mF $C = 1.9$ noch recht wohl als reell angesehen werden darf. Die unausgeglichenen und um 500 mm vermehrten $H(x)$ lauten

x	=	0	1	2	3	4
$H(x)$	=	443.5	448.8	440.2	442.6	453.3
x	=	5	6	7	8	9
$H(x)$	=	434.1	440.8	426.4	444.0	436.9
x	=	10	11	12	13	14
$H(x)$	=	458.3	471.0	470.1	480.0	473.9
x	=	15	16	17	18	19
$H(x)$	=	474.1	451.6	447.4	436.9	443.4

und liefern eine Amplitude von 54 mm. Die ausgeglichene Kurve besitzt ein stark ausgeprägtes Maximum bei Phase 13 und ein schwaches Nebenmaximum bei Phase 3 zwischen zwei nicht erheblich verschiedenen Minimis. Es ist vielleicht nicht überflüssig, hervorzuheben, daß die betrachtete Flut zwar mit der täglichen Mondflut eng zusammenhängt, aber nicht mit ihr identisch ist, denn T bedeutet hier den Stundenwinkel des Mondes um Mittag und hat als Periode den synodischen Monat.

Die monatliche Flut $T+S=L$ ist doppelt berechnet worden: das eine Mal direkt in Tabelle 5), das andre Mal durch Kombination der Argumente T und S in Tabelle 6). Beide Rechnungen stimmen für den einfachen Winkel befriedigend überein, für die folgenden Winkel dagegen nicht. Ferner zeigt sich, daß die Kombinationsrechnung merklich größere mF C liefert. Demnach ist die Kombination der Argumente, die an sich ja eine starke Verminderung der Additionsarbeit bedeutet, nur in beschränktem Maße zu verwenden.

Die fünf übrigen von mir untersuchten Argumente liefern Koeffizienten, die bei dem einfachen Winkel zum Teil nicht unbedeutend sind, so z. B. bei

$$2T+S=T+L \text{ und } T-S=2T-L.$$

Im übrigen geben jedoch diese Glieder vorderhand zu keinen besondern Bemerkungen Anlaß.

§ 20. Unter den langsamen Argumenten nimmt S eine Sonderstellung ein. Es liefert mit den Termen

$$-20.6\cos x-51.8\sin x+12.3\cos 2x+32.3\sin 2x$$

die stärkste unter den periodischen Schwankungen. Die unausgeglichenen und um 500 mm vermehrten $H(x)$ lauten

x =	0	1	2	3	4
$H(x)$ =	460.9	379.4	462.4	424.5	410.9
x =	5	6	7	8	9
$H(x)$ =	395.0	377.7	371.3	409.5	453.2
x =	10	11	12	13	14
$H(x)$ =	479.1	523.2	539.4	514.2	523.5
x =	15	16	17	18	19
$H(x)$ =	489.1	470.3	436.0	421.1	476.6

und liefern eine Amplitude von 168 mm. Das Hauptmaximum fällt auf Phase 12, das Hauptminimum auf Phase 7. Auffällig ist die auch in den Streuungen (vgl. § 10) zum Ausdruck kommende starke Einkerbung der Kurve bei Phase 1, die hier noch deutlicher hervortritt, als in der auf Monatsmitteln beruhenden Jahreskurve bei Westphal.

Da die durchschnittliche Gravitationswirkung der Sonne bei den Gezeiten nicht ganz die Hälfte der Mondwirkung ausmacht, so rührt nach Maßgabe der für das Argument L gefundenen Zahlen nur ein mäßiger Bruchteil der jährlichen Schwankung von der Anziehung der Sonne her: der ansehnliche Ueberschuß ist — teils mittelbar, teils unmittelbar — meteorologischen Ursprungs. Von den verschiedenen Ursachen, an die man zunächst denken kann, nämlich thermische Volumenänderung des Seewassers, durchschnittliche Lage der Isobaren, Verdunstung und Niederschlag, sowie Zu- und Abfluß, ist wohl jede beteiligt, jedoch wird man den Anteil jeder einzelnen Ursache nicht ohne weitschichtige Vorarbeiten abtrennen können.

§ 21. Ein absonderliches Verhalten zeigt das Argument $S+2P$, dessen Umlauf sehr nahe bei der Euler'schen Periode der Libration der Erdachse liegt. Die unausgeglichenen und um 500 mm vermehrten $H(x)$ lauten

x =	0	1	2	3	4
$H(x)$ =	431.3	424.3	416.2	406.7	399.5
x =	5	6	7	8	9
$H(x)$ =	442.2	480.1	441.4	432.0	436.8
x =	10	11	12	13	14
$H(x)$ =	483.3	469.1	442.0	446.1	460.1
x =	15	16	17	18	19
$H(x)$ =	452.0	479.8	487.6	516.9	479.1

Die Kurve besitzt bei einer extremen Amplitude von 117.5 mm drei starke Zacken, die von vornherein Mißtrauen erwecken. Dem entsprechend ist das $(\mathrm{mF})^2$ von H, wenn man nur c_0 mitnimmt, recht groß, nämlich 914.0. Gleicht man nun bis zum fünffachen Winkel aus, so geht $(\mathrm{mF}\,H)^2$ bis auf 79.2 und $\mathrm{mF}\,C$ bis auf 2.8 herunter. Ein solches Ergebnis gilt für gewöhnlich als ein höchst befriedigender und Vertrauen erweckender Anschluß. Hier dagegen wird man selbst in den großen Werten von C_1 und C_2 trotz des kleinen $\mathrm{mF}\,C$ einstweilen nur ein Rechnungsresultat zu sehen haben, das durch ein besondres Zusammenwirken der langsamen aperiodischen Schwankungen zustande gekommen ist. Denn daß die Euler'sche Libration derartige Schwankungen des Wasserstandes erzeugen könnte, ist nach dem, was man über die Libration der Erdachse weiß, ganz ausgeschlossen; ebensowenig wird man das Ergebnis dem Monde zuschreiben dürfen, da das betreffende Glied des Flutpotentials wegen des Bestandteils $2P$ mit dem Faktor e^2 behaftet ist. Gleichwohl dürfte das Argument $S+2P$ und andre ihm ähnliche auch bei späteren Untersuchungen eine gewisse Aufmerksamkeit verdienen, da sie gewissermaßen ein Reagens für die Ausgleichung der aperiodischen Schwankungen liefern.

§ 22. Nach diesen Bemerkungen wird man auch die Koeffizienten der übrigen, in den Tabellen aufgeführten Argumente, nämlich

$$S+P,\ S-N,\ S-P,\ C(2),\ C(4),\ C(6)$$

für wenig vertrauenswürdig halten. Daher sollen hier nur einige Angaben zu dem Argument $C(4)$ hinzugefügt werden, dessen Umlauf mit der bei Bakhuyzen und Christie vorkommenden Chandler'schen Periode übereinstimmt. Das

Argument ist zweimal, nämlich mit Teilmitteln und mit Gesamtmitteln durchgerechnet worden. Für die Teilmittel lauten die um 500 mm vermehrten $H(x)$ folgendermaßen:

x =	0	1	2	3	4
$H(x)$ =	465.4	517.6	444.4	493.8	470.4
x =	5	6	7	8	9
$H(x)$ =	403.5	443.4	433.3	453.6	467.2
x =	10	11	12	13	14
$H(x)$ =	464.8	444.4	447.0	414.3	421.4
x =	15	16	17	18	19
$H(x)$ =	461.2	442.2	441.0	446.7	443.9

Die Gesamtmittel liefern im wesentlichen dieselben Werte, obgleich die Teilsummen erhebliche Unterschiede in der Summandenanzahl aufweisen. Zeichnet man die Kurve für $C(4)$ auf, so führen ihre starken Sprünge auch ohne Rechnung zu der Vorstellung, daß es doch recht mißlich ist, aus einer solchen Kurve eine periodische Schwankung ableiten zu wollen, deren Amplitude nur etliche Millimeter beträgt.

Schlußbemerkung.

§ 23. Als Hauptergebnis der Untersuchung ist — außer einer neuen Bestimmung der jährlichen Schwankung — der Nachweis einer Anzahl merklicher Mondglieder zu betrachten, denen sich voraussichtlich bei weiterer Fortsetzung der Arbeit noch einige andre anreihen werden. Ferner hat sich gezeigt, daß für die langsamen Argumente — mit Ausnahme von S — die Dauer der Beobachtungsreihe zu kurz ist: man hat, um die langsameren aperiodischen Schwankungen unschädlich zu

machen, einen erheblich längeren Zeitraum nötig, wobei man gegebenenfalls zur Erleichterung der Rechnung statt mit Tageswerten mit Monatsmitteln oder ähnlichen Zusammenfassungen rechnen kann. Hiermit im Zusammenhange wird man sich dann auch die Frage vorzulegen haben, ob es nicht möglich ist, den störenden Einfluß der langsamen Schwankungen schon von vornherein wenigstens teilweise zu eliminieren.

Anhang: Tabellen.

Koeffizienten der trigonometrischen Entwickelung und mittlere Fehler.

Einheit: 1 mm.

1) $3T+S$ gebildet mit Teilmitteln aus $3T+S$ und S.
Tägl. Bewegung: 0.10432749 Periode: 9.585.

R	c	s	C	mFC	mFH²	R	C	mFC	mFH²
0	— 48.9				81.0	0			81.0
1	— 0.8	+ 4.1	4.2	2.8	80.4	2	5.4	2.7	73.4
2	+ 2.3	— 4.9	5.4	2.7	71.6	1	4.2	2.7	71.6
3	+ 0.6	+ 0.3	0.7	2.8	82.3	5	3.0	2.7	75.5
4	+ 1.5	+ 2.3	2.8	3.0	90.2	4	2.8	2.9	82.2
5	— 2.2	— 2.1	3.0	3.2	100.0	3	0.7	3.2	100.0

2) $2T+3S$ gebildet mit Teilmitteln aus $2T+3S$ und S.
Tägl. Bewegung: 0.07594011 Periode: 13.168.

0	— 48.8				53.1	0			53.1
1	— 2.0	— 3.3	3.8	2.2	50.7	1	3.8	2.2	50.7
2	+ 0.2	— 3.7	3.7	2.2	48.4	2	3.7	2.2	48.4
3	+ 2.8	+ 0.3	2.8	2.2	49.8	3	2.8	2.2	49.8
4	+ 1.2	— 0.1	1.2	2.4	57.4	5	2.4	2.3	53.7
5	— 2.3	— 0.4	2.4	2.5	64.0	4	1.2	2.5	64.0

3) $2T+S$ gebildet mit Teilmitteln aus $2T+S$ und S.
Tägl. Bewegung: 0.07046429 Periode: 14.192.

R	c	s	C	mFC	mFH²	R	C	mFC	mFH²
0	— 49.9				137.8	0			137.8
1	— 1.4	+ 10.8	10.9	2.9	84.0	1	10.9	2.9	84.0
2	+ 2.9	— 0.9	3.0	3.0	89.1	3	7.0	2.5	62.2
3	+ 0.6	— 7.0	7.0	2.6	64.8	4	3.5	2.5	62.2
4	— 3.0	+ 1.9	3.5	2.6	65.3	5	3.4	2.5	63.3
5	— 0.9	— 3.2	3.4	2.6	67.3	2	3.0	2.6	67.3

4) $T+2S$ gebildet mit Teilmitteln aus $T+2S$ und S.
Tägl. Bewegung: 0.03933901 Periode: 25.420.

0	— 49.1				93.0	0			93.0
1	+ 2.6	+ 7.6	8.0	2.6	66.0	1	8.0	2.6	66.0
2	— 3.4	— 2.5	4.2	2.5	63.1	5	4.8	2.4	59.4
3	+ 2.6	+ 0.1	2.6	2.6	67.6	2	4.2	2.3	55.1
4	+ 2.0	— 0.3	2.0	2.8	76.4	3	2.6	2.4	59.0
5	— 1.0	+ 4.7	4.8	2.6	67.7	4	2.0	2.6	67.7

5) $T+S$ gebildet mit Teilmitteln aus $T+S$ und S.
Tägl. Bewegung: 0.03660110 Periode: 27.322.

0	— 48.8				94.4	0			94.4
1	+ 5.3	— 7.8	9.4	2.3	53.2	1	9.4	2.3	53.2
2	— 3.8	— 1.6	4.1	2.2	49.1	2	4.1	2.2	49.1
3	— 1.1	+ 3.5	3.7	2.2	46.3	3	3.7	2.2	46.3
4	+ 0.7	— 0.9	1.1	2.3	53.6	5	2.4	2.2	49.4
5	— 1.5	— 1.9	2.4	2.4	59.0	4	1.1	2.4	59.0

6) $T-S$ gebildet mit Teilmitteln und Argumentkombination aus T und S.

R	c	s	C	mFC	mFH²	R	C	mFC	mFH²
0	— 49.1				142.8	0			142.8
1	+ 4.8	— 8.0	9.4	3.3	108.0	1	9.4	3.3	108.0
2	— 5.3	— 3.3	6.3	3.1	96.1	3	6.7	3.0	92.9
3	— 1.1	+ 6.6	6.7	2.8	76.8	2	6.3	2.8	76.8
4	+ 1.2	— 2.0	2.4	3.0	85.7	5	2.7	2.9	84.2
5	— 2.7	+ 0.3	2.7	3.1	96.7	4	2.4	3.1	96.7

7) T gebildet mit Teilmitteln aus T und S.
Tägl. Bewegung: 0.03386319 Periode: 29.531.

0	— 49.1				235.6	0			235.6
1	— 7.2	— 13.9	15.7	3.4	118.3	1	15.7	3.4	118.3
2	— 2.4	+ 11.8	12.0	1.9	37.6	2	12.0	1.9	37.6
3	+ 1.1	— 0.4	1.2	2.0	42.4	4	2.7	1.9	37.8
4	+ 2.6	— 0.7	2.7	2.1	43.4	5	1.6	2.1	42.4
5	+ 1.2	— 1.0	1.6	2.2	50.2	3	1.2	2.2	50.2

8) $T—S$ gebildet mit Teilmitteln und Argumentkombination aus T und S.
Tägl. Bewegung: 0.03112528 Periode: 32.128.

0	— 49.1				221.2	0			221.2
1	— 0.2	— 17.1	17.1	2.8	75.9	1	17.1	2.8	75.9
2	+ 4.6	+ 1.1	4.8	2.6	70.9	5	6.3	2.4	59.9
3	— 2.7	— 1.7	3.2	2.7	74.1	2	4.8	2.3	51.7
4	+ 3.4	+ 2.9	4.4	2.6	69.6	4	4.4	2.1	43.1
5	+ 5.4	+ 3.1	6.3	2.0	41.5	3	3.2	2.0	41.5

9) $S+2P$ gebildet mit Gesamtmitteln.

Tägl. Bewegung: 0.00335682 Periode: 297.90.

R	c	s	C	mFC	mFH²	R	C	mFC	mFH²
0	— 48.7				914.0	0			914.0
1	— 2.1	— 22.8	22.9	8.4	711.9	2	23.2	8.4	705.5
2	+ 2.0	— 23.1	23.2	6.7	448.8	1	22.9	6.7	448.8
3	— 2.9	— 15.7	16.0	5.6	321.8	5	17.2	5.4	389.2
4	+ 2.7	+ 6.5	7.1	5.8	334.9	3	16.0	3.3	110.2
5	— 17.2	— 1.1	17.2	2.8	79.2	4	7.1	2.8	79.2

10) $S+P$ gebildet mit Gesamtmitteln.

Tägl. Bewegung: 0.00304736 Periode: 328.15.

0	— 49.0				505.6	0			505.6
1	+ 11.8	+ 6.1	13.3	6.8	461.1	3	18.2	6.1	369.2
2	— 1.1	+ 2.3	2.5	7.2	518.3	1	13.3	5.5	300.6
3	— 14.5	— 11.1	18.2	5.8	342.0	5	12.0	4.9	235.9
4	+ 7.6	— 3.2	8.3	5.8	342.2	4	8.3	4.7	216.8
5	— 5.6	— 10.6	12.0	5.1	257.9	2	2.5	5.1	257.9

11) S gebildet mit Teilmitteln aus T und S.

Tägl. Bewegung: 0.00273791 Periode: 325.24.

0	— 49.1				2679.8	0			2679.8
1	— 20.6	— 51.8	55.8	10.8	1166.3	1	55.8	10 8	1166.3
2	+ 12.3	+ 32.3	34.5	7.3	527.4	2	34.5	7.3	527.4
3	— 2.9	— 5.3	6.0	7.6	580.8	5	11.0	7.2	515.0
4	+ 4.6	— 8.5	9.6	7.8	601.9	4	9.6	7.2	524.1
5	+ 2.7	— 10.7	11.0	7.8	600.6	3	6.0	7.8	600.6

12) *S—N* gebildet mit Gesamtmitteln.

Tägl. Bewegung: 0.00259081 Periode: 385.98.

R	c	s	C	mFC	mFH^2	R	C	mFC	mFH^2
0	— 49.0				342.9	0			342.9
1	— 10.0	+ 6.0	11.6	5.5	303.4	1	11.6	5.5	303.4
2	— 7.9	— 1.4	8.0	5.5	301.4	2	8.0	5.5	301.4
3	+ 3.0	+ 7.3	7.9	5.5	299.6	3	7.9	5.5	299.6
4	+ 1.6	+ 4.4	4.6	5.8	334.6	4	4.6	5.8	334.6
5	+ 2.7	+ 1.1	2.9	6.3	399.5	5	2.9	6.3	399.5

13) *S—P* gebildet mit Gesamtmitteln.

Tägl. Bewegung: 0.00242845 Periode: 411.78

0	— 49.2				648.7	0			648.7
1	— 8.5	+ 3.9	9.4	8.2	673.0	3	23.4	6.3	402.8
2	— 10.0	— 2.4	10.3	8.3	692.0	4	15.1	5.5	305.0
3	— 23.4	— 1.6	23.4	6.2	377.2	2	10.3	5.2	270.4
4	— 12.0	+ 9.2	15.1	4.9	239.1	1	9.4	4.9	239.1
5	+ 1.3	+ 6.8	7.0	4.9	238.5	5	7.0	4.9	238.5

14) *C*(2) gebildet mit Gesamtmitteln.

Tägl. Bewegung: 0.00236407 Periode: 423.00.

0	— 49.3				694.3	0			694.3
1	— 3.2	+ 17.9	18.2	7.6	581.2	4	18.8	7.5	568.9
2	+ 3.2	+ 0.1	3.2	8.0	652.0	1	18.2	6.5	424.0
3	— 11.9	— 2.6	12.1	8.0	638.9	3	12.1	6.1	375.8
4	+ 16.1	— 9.6	18.8	6.6	435.0	5	10.3	5.9	347.0
5	— 7.8	+ 6.8	10.3	6.4	413.0	2	3.2	6.4	413.0

15) $C(4)$ gebildet mit Teilmitteln aus S und $C(4)$.

Tägl. Bewegung: 0.00232019 Periode: 431.00.

R	c	s	C	mFC	mFH²	R	C	mFC	mFH²
0	— 49.0				663.5	0			663.5
1	+ 10.6	+ 8.0	13.3	8.0	637.0	3	16.0	7.7	591.6
2	+ 14.6	+ 5.7	15.6	7.4	558.8	2	15.6	7.1	507.4
3	— 8.9	+ 13.3	16.0	6.7	448.7	1	13.3	6.7	448.7
4	+ 3.2	+ 1.7	3.6	7.2	518.5	5	6.6	7.0	490.2
5	+ 5.8	— 3.3	6.6	7.6	584.7	4	3.6	7.6	584.7

16) $C(4)$ gebildet mit Gesamtmitteln.

0	— 49.4				597.2	0			597.2
1	+ 8.5	+ 7.5	11.3	7.7	592.0	2	15.2	7.3	531.1
2	+ 14.1	+ 5.7	15.2	7.2	516.4	3	14.8	6.8	456.0
3	— 5.5	+ 13.8	14.8	6.6	427.5	5	12.1	6.4	412.9
4	+ 0.6	— 5.7	5.7	6.9	475.8	1	11.3	6.1	371.3
5	+ 11.1	— 4.9	12.1	6.5	417.9	4	5.7	6.5	417.9

17) $C(6)$ gebildet mit Gesamtmitteln.

Tägl. Bewegung: 0.00227790 Periode: 439.00.

0	— 49.0				1026.4	0			1026.4
1	— 0.2	— 3.5	3.5	10.7	1139.9	4	22.8	9.2	841.2
2	— 10.0	— 16.7	19.5	10.2	1039.5	3	20.5	8.2	674.3
3	+ 2.8	+ 20.3	20.5	9.4	877.5	2	19.5	7.0	486.8
4	— 22.2	+ 5.1	22.8	7.5	564.2	5	17.3	5.5	302.3
5	— 11.0	— 13.4	17.3	6.0	355.8	1	3.5	6.0	355.8

Lebenslauf.

Ich, Albert Döge, ev.-luth. Konfession, wurde am 11. Januar 1887 zu Leipzig geboren. Meine Vorbildung genoß ich auf Bürgerschule, Realschule und Realgymnasium meiner Vaterstadt. 1906 verließ ich das letztere mit dem Reifezeugnis und wandte mich dem Studium der Mathematik, Physik und Astronomie zu. Mein drittes Semester verbrachte ich an der Universität zu Freiburg, die übrigen an der zu Leipzig. Ich hörte die Vorlesungen der Herren Professoren Liebmann, Hölder, Loewy, Rohn, Neumann, Bruns, Peter, Des Coudres, Wiener, Scholl, Ostwald und Wundt.

Die Anregung zur vorliegenden Untersuchung empfing ich von dem Direktor des kgl. preußischen geodätischen Instituts zu Potsdam, Herrn Prof. Helmert; die Anleitung zur Reduktion eines Teils des Materials gab mir Herr Prof. Börsch, Potsdam. Ich möchte nicht unterlassen, an dieser Stelle hierfür meinen Dank auszusprechen. Vor allem aber fühle ich mich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Bruns für die vielen Förderungen, die er meiner Arbeit zu Teil werden ließ, zu Dank verpflichtet.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
§ 1— 2.	Einleitung	3
§ 3.	Literatur	4
§ 4.	Das benutze Material	5
§ 5— 9.	Ansatz der Rechnung und die Zahlenkarten	6
§ 10.	Ausscheidung der sporadischen Fälle	15
§ 11—14.	Das System der Argumente	19
§ 15—17.	Die Ausgleichung	31
§ 18—22.	Die Ergebnisse der Ausgleichung	35
§ 23.	Schlußbemerkung	41
Anhang:	Tabellen der Koeffizienten und mittleren Fehler.	